DIA INTERNACIONAL DA MATEMÁTICA
14 DE MARÇO

Ambrósio! Apetecia-me algo …

Participantes:

A partir dos 12 anos é possível resolver este desafio.

O seu aprofundamento será recomendado para alunos que, ou saibam programar ou trabalhar com folha de cálculo ou que frequentem o 12º Ano.

É aconselhável ter noções sobre sequências de números e a forma como se podem obter.

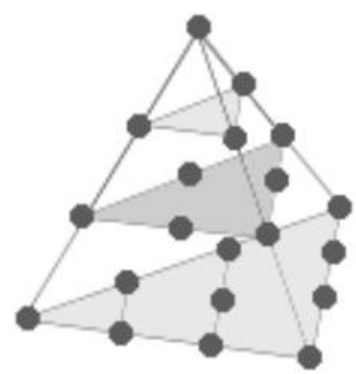
Preparação:

Uma folha guia de exploração, para além de gosto por desafios lógico-matemáticos, e possuir espírito investigativo e criatividade.

Atividade:

A Madame d' Oliveira decidiu dar uma festa para 81 convidados.

As suas festas são famosas pela decoração. A Madame pretende construir, no centro da mesa, uma pirâmide formada com uns conhecidos bombons de forma esférica. A pirâmide terá base triangular, e formará uma figura conhecida matematicamente por tetraedro como se pode observar na imagem ao lado.



<u>O desafio proposto:</u>

"Quantos bombons serão no mínimo necessários, por forma a conseguir-se construir a pirâmide com a forma pretendida, garantindo que existe pelo menos um bombom para cada um dos 81 convidados?"

Aprofundamentos:

- Supondo que a Madame d' Oliveira teve tanto sucesso com a sua pirâmide de bombons que pretende reproduzir a pirâmide tetraédrica, mas agora numa festa com 3000 convidados, quantos bombons serão necessários para construir essa nova pirâmide, mantendo as condições da pirâmide da primeira festa.

  A partir das observações e relações obtidas na atividade inicial, procura responder a esta questão, ou construindo um pequeno programa, ou recorrendo a uma folha de cálculo, por forma a obteres rapidamente a resposta, sem teres de efetuar demasiados cálculos fastidiosos.

Caso não tenhas conhecimentos de programação ou de folha de cálculo de cálculo, tenta resolver o desafio com papel e lápis, mas considerando que a festa terá apenas 300 convidados.

Nota: São denominados números tetraédricos os números naturais que permitem construir pirâmides tetraédricas com base no número de "andares" que as formam; por exemplo, 1, 4, 10 e 20, serão os quatro primeiros números tetraédricos correspondendo, respetivamente, ao número de bombons necessários para construir as pirâmides com um, dois, três e quatro "andares".

- Um desafio final para os alunos do 12º Ano conhecedores do Binómio de Newton e do cálculo dos respetivos coeficientes:

  "Determina o termo geral da sequência geradora dos números tetraédricos".

Contexto matemático e recursos:

Conceitos matemáticos envolvidos: sequência de números, formas de as obter e Triângulo de Pascal;

São necessários folha de papel, caneta e calculadora ou computador.

Ficha Guia de Exploração;

Para a primeira extensão, deverás ter acesso a uma linguagem de programação ou uma folha de cálculo (será utilizada a linguagem Python e a calculadora gráfica TI-Nspire CX II T como formas de exemplificação do trabalho a desenvolver);

Para a segunda extensão são necessários conhecimentos de cálculo combinatório;

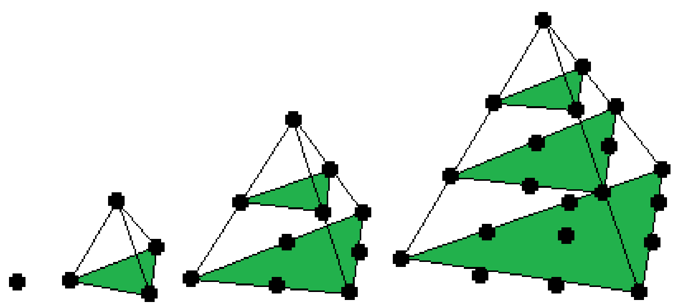
Créditos:

Esta atividade foi proposta pelo Grupo T3 (Teachers Teaching with Technology) Portugal

Ambrósio! Apetecia-me algo…

Ficha Guia Exploratória

Começa por observar as figuras abaixo, tentando compreender como podes obter cada um dos andares das pirâmides representadas (denominadas em matemática por tetraedros).



1. Preenche a tabela que se segue. Começa por registar o número de bombons necessários para construir cada um dos “andares” que formam as diversas pirâmides tetraédricas.

Ordem do andar da pirâmide tetraédrica (n)	Número de bombons necessários para construir o n-ésimo andar	Número total de bombons necessários para construir a pirâmide tetraédrica com n-andares
1	1	1
2	3	4
3		

Quantos "andares" terá que ter a pirâmide do primeiro desafio? E quantos bombons serão necessários para a construir?

2. Observando a sequência de números da segunda coluna e a forma da figura obtida em cada um dos andares, não é difícil perceber porque a esse conjunto de números se chamam <u>números triangulares</u> ($\mathbf{Tr_n}$ irá representar o número triangular de ordem n; por exemplo, o terceiro número triangular $\mathbf{Tr_3}$ será o número 6).

Os números representados na terceira coluna são denominados <u>números tetraédricos</u> (**Tt**) e por um raciocínio análogo $\mathbf{Tt_n}$ representa o n-ésimo número tetraédrico; por exemplo, o quarto número tetraédrico $\mathbf{Tt_4}$ será o número 20.
A partir da observação da tabela anterior, tenta obter uma relação entre os números tetraédricos e os números triangulares.

Por exemplo, no caso do sétimo número tetraédrico, será

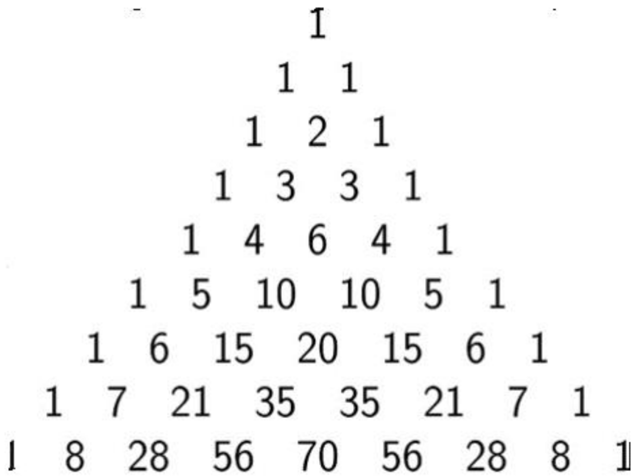
$$Tt_7 = Tt_{\dots} + Tr_{\dots}$$

e generalizando:

$$Tt_n = Tt_{\dots} + Tr_{\dots} \qquad (1)$$

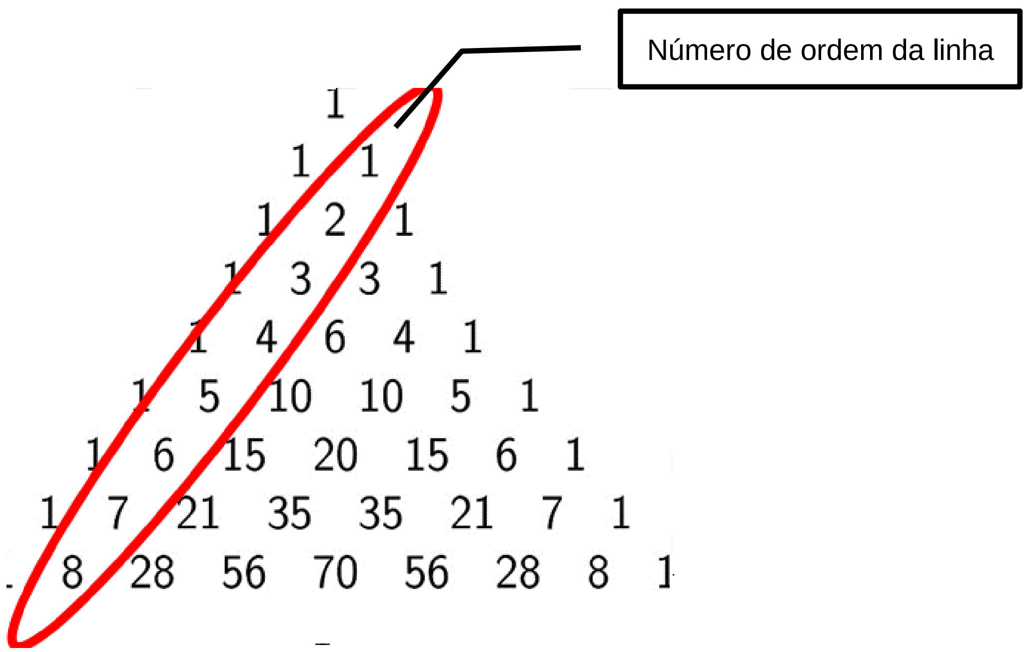
3. Como podes observar é fácil obter os números triangulares e mesmo os primeiros números tetraédricos, mas, com o aumento da ordem dos números tetraédricos o cálculo começa a complicar e a construção de um pequeno programa (utilizando uma linguagem relativamente simples como o Python), transforma-se numa ferramenta muito útil. Também poderás recorrer a uma folha de cálculo para resolveres o desafio.
Mas antes de abordarmos esta estratégia, que exige conhecimentos básicos de programação e de uma linguagem específica, ou conhecimentos de folha de cálculo, vamos ver um outro processo curioso de obter os números triangulares e tetraédricos, de uma forma muito visual.
Para isso, vamos recorrer ao denominado *Triângulo de Pascal*.

Na imagem está um exemplo com as nove primeiras linhas desse triângulo. A primeira linha é identificada como linha zero.



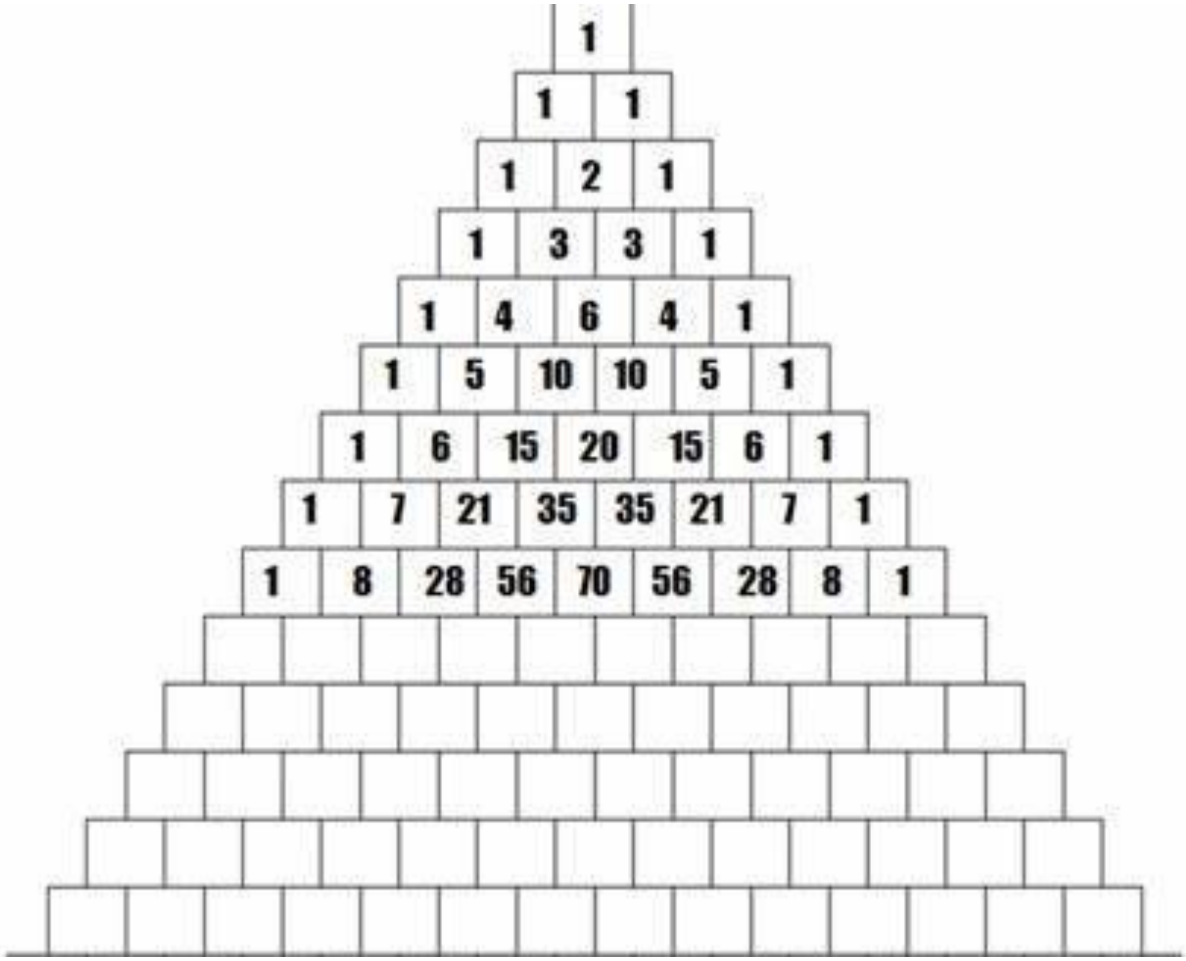
Na imagem seguinte, observa que a <u>segunda diagonal</u> do triângulo (contornada) identifica a ordem da linha.

Observa a terceira e a quarta diagonais. Que concluis?



Para utilizar o *Triângulo de Pascal* na resolução do desafio, temos que aumentá-lo e para isso é necessário compreender o seu processo de construção.

Após identificares esse processo, preenche, na figura abaixo, mais algumas linhas do *Triângulo de Pascal*.



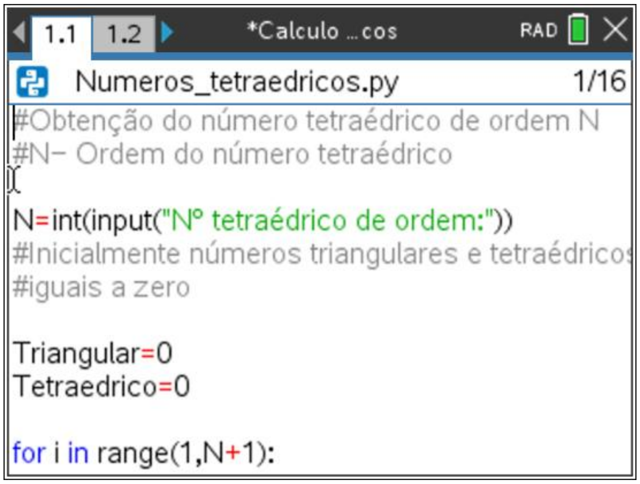
Se a nova festa que a Madame d' Oliveira pretende realizar, tivesse apenas 300 convidados já conseguias responder a partir do *Triângulo de Pascal* que construíste! Quantos bombons seriam necessários?

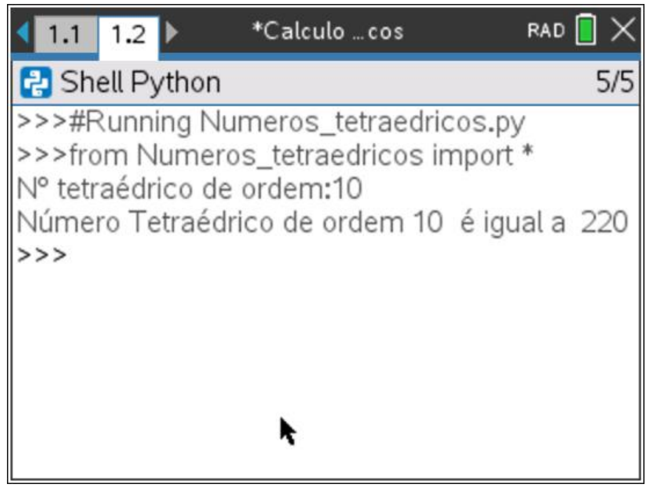
4. Mas, no caso concreto, a festa terá~~irá ter~~ 3000 convidados, o que torna muito morosa a resolução, mesmo recorrendo ao Triângulo de Pascal. Por isso, iremos construir um pequeno programa (neste caso em linguagem Python) que nos irá permitir, sabendo o número de "andares" que formam a pirâmide tetraédrica, quantos bombons serão necessários para a construir.

Iremos construir o programa pretendido recorrendo a um ciclo *for* e à fórmula de recorrência identificada por (1) nesta ficha. Experimentando alguns valores para N, facilmente encontrarás o o número tetraédrico pretendido.

Podemos observar na figura abaixo que o décimo número tetraédrico é o 220.

Obviamente o programa pode ser bastante melhorado, eliminando, por exemplo, a necessidade de experimentar a ordem do número tetraédrico até encontrar o valor pretendido.





5. Para os alunos do 12º Ano que já trabalharam com o cálculo combinatório e sabem como determinar os coeficientes do Binómio de Newton a partir dos valores do Triângulo de Pascal, fica como desafio, determinar o termo geral da sucessão geradora dos números tetraédricos e, dessa forma, determinar muito rapidamente quantos bombons irão ser necessários para formar a pirâmide presente na festa com 3 000 convidados!

Créditos:

Esta atividade foi proposta pelo Grupo T3 (Teachers Teaching with Technology) Portugal